2023: International Conference on
"Academic Integrity and Lifelong Learning" (France)
https://www.openconference.us/index.php/academic/issue/view/14

Об Асимптотическом Свойстве Граничных Функционалов Однородного Пуассоновского Точечного Процесса

Юлдошева Наргиза
НУУз.

Настоящая работа, следуя [1], посвящена вычислению асимптотического выражения граничных функционалов выпуклых оболочек, порожденных независимыми наблюдениями над случайным вектором, имеющем пуассоновское распределение в конусе K.

Аналогично как в работе [1], обозначим через K – конус, образованный двумя лучами $\ell_i = \left(z : z = te_i, t > 0\right)$, $i = 1,2$. Здесь e_1 и e_2 – единичные векторы и α угол между e_1 и e_2.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$($\lambda(\cdot)$- Лебегово мера). Обозначим через $\Pi(\mathrm{K})$ сужение этого процесса на K. Рассмотрим выпуклую оболочку C, порожденную $\Pi(\mathrm{K})$, и множество ее вершин Z.

Обозначим через $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $\left(e_0, z - z_0\right) \geq 0$ для всех $z \in Z$, где $e_0 = e_1 + e_2$. Из определения нетрудно убедиться, что

$$\left(e_0, z - z_0\right) = 0 \quad (1)$$

Пронумеруем теперь вершины C, обходя границу против часовой стрелки. Поскольку z_0 уже определена, то каждая из вершин, тем самым, получает свой номер $j, -\infty < j < \infty$. Выберем на луче l_1 последовательность точек $\gamma_j = x_j e_1$, $j \geq 1$, лежащих на пересечении ℓ_1 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_{j-1} и z_j. Аналогичным образом точки $\gamma_j = y_j e_2$, $j \leq -1$, получаются в результате пересечения l_2 и прямых, проходящих соответственно через z_j и z_{j+1}.

Пусть δ_j, $j \neq 0$, – множество внутренних точек треугольника с вершинами $z_{j-1}, \gamma_{j-1}, \gamma_j$, если $j \geq 1$, и вершинами $z_{j+1}, \gamma_{j+1}, \gamma_j$, если $j \leq -1$. Обозначим через $\gamma_0 = x_0 e_1$, $\gamma_0' = y_0 e_2$ вершины треугольника, множество внутренних точек которого мы обозначили через δ_0.

Положим

$$\xi_j = \lambda(\delta_j).$$

Определим граничные функционалы

$$\theta_T = \inf\left\{ j : x_j \geq T \right\}, \quad (2)$$

где $T > 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Если C_n' – выпуклая оболочка порожденная $\Pi(\mathrm{K})$, то при $T \to \infty$

$E\theta_T = \alpha(T) + o(\beta(T))$, а $D\theta_T = \beta^2(T)(1+o(1))$,

где $\alpha(T) = (2\log T)/3,\ \beta^2(T) = (10\log T)/27.$

Действительно, для любого $N > 0$ имеем

$$E\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right) = E\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}; \left|\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right| \leq N\right) +$$

$$+E\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}; \left|\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right| > N\right) = E_1(T) + E_2(T).$$

Аналогично имеем

$$E\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right)^2 = E\left(\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right)^2; \left|\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right| \leq N\right) +$$

$$+E\left(\left(\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right)^2; \left|\frac{\theta_T - \alpha(T)}{\beta(T)}\right| > N\right) = E_1^*(T) + E_2^*(T).$$

Легко видеть, что

$$E_1(T) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz,\ E_1^*(T) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } T \to \infty$$

Далее, получаем

$$E_2(T) \leq E_2^*(T) = \sum_{\left|\frac{k-\alpha(T)}{\beta(T)}\right| > N} \left(\frac{k - \alpha(T)}{\beta(T)}\right)^2 P\left(\theta_T = k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{2^{i-1} N \leq \left|\frac{k-\alpha(T)}{\beta(T)}\right| < 2^i N} \left(\frac{k - \alpha(T)}{\beta(T)}\right)^2 P\left(\theta_T = k\right) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^i N\right)^2 \times$$

$$\times P\left(\left|\theta_T - \alpha(T)\right| > 2^{i-1} N \beta(T)\right) \leq c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \left(2^i N\right)^2 \exp\left(-c_2 2^i N\right) \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. Если $\min(T_1, T_2) = T \to \infty$, при этом $\dfrac{T_1}{T_2} \succ\prec 1$, то

$$\theta_{T_2} - \theta_{T_1} = o_p(\beta(T)).$$

Здесь, $\xi_n = o_p(\beta(n))$ при $n \to \infty$ означает, что $\dfrac{\xi_n}{\beta(n)} \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. По определению, $\theta_{T_2} - \theta_{T_1} \geq 0$. Отсюда, из теоремы 1 и неравенства Маркова для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P\left(\theta_{T_2} - \theta_{T_1} > \varepsilon\beta(T_1)\right) \leq \frac{E\left(\theta_{T_2} - \theta_{T_1}\right)}{\varepsilon\beta(T_1)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(c_1\frac{E\left(\theta_{T_2} - \alpha(T_2)\right)}{\beta(T_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{E\left(\theta_{T_1} - \alpha(T_1)\right)}{\beta(T_1)} + \frac{c_2}{\beta(T_1)}\right) \to 0 \text{ при } T_1 \to \infty.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.

В заключение заметим, что вполне аналогично устанавливается асимптотическая нормальность граничного функционала θ'_T, а также свойства, отмеченные в теорем 1 и 2. Из определения соответствующих величин следует, что θ_T и $\theta'_{T'}$ при $\min\{T, T'\} \to \infty$ асимптотически независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юлдошева Н. Об одном свойстве граничных функционалов однородного пуассоновского точечного процесса. «Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari» Respublika ilmiy-amaliy anjumani.
2. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On some properties of vertex processes of random convex hulls, Cite as: AIP Conference Proceedings 2365, 060012 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0057259, Published Online: 16 July 2021. 7P.
3. Петров В.В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука. 1987. 320с.